自己交叉類と折り目写像の非存在(ニュートン図形と特異点)

AUTHOR(S):

佐久間, 一浩

数理解析研究所講究録 1233 巻 2001 年 111-121

自己交叉類と折り目写像の非存在

近畿大学・理工学部数学物理学科　　佐久間　一浩
(Kazuhiro Sakuma)
Dept. of Math. and Phys., Kinki Univ.

本稿は，大本亨氏と佐伯修氏との共同研究を中心に述べるつもりである.（しかし，本稿にもし誤りが含まれていれば，それはすべて著者一人の責任である.）

§0. 序論

M^n, N^p をそれぞれ n 次元，p 次元の C^∞ 級多様体，$f: M^n \to N^p$ をその間の C^∞ 級写像とする.

次元の関係が $n < p$ で，特に $N^p = \mathbf{R}^p$ のときに,

「与えられた M^n に対して，埋め込み写像やはめ込み写像 $f: M^n \to \mathbf{R}^p$ がいつ存在するか（あるいは存在しないか）?」

という問題は，1930 年代に多様体の定義を Whitney が正確に定式化して以来，活発に研究されてきた（[1] 参照）. これは微分トポロジーに属する問題である.

例えば，この種の問題で典型的なのが M^n として，実あるいは複素射影空間を選んで，それらが「最低何次元のユークリッド空間に埋め込んだり，はめ込んだりできるか?」を考察することであろう.

Chern や Thom の研究に始まり，1950, 60 年代に流行った「射影空間の埋め込み・はめ込み問題」である. 主な道具立ては，特性類の理論とその精密化である. もちろん，射影空間のみならずグラスマン多様体や旗多様体あるいはレンズ空間に置き換えて，同様の考察が可能である. 実際，そうしたアプローチによる研究も多く見られる.

[雑感] これらの研究について参考文献を挙げればよいのかもしれないが，不勉強のため適切な文献を網羅できそうもないので省略する. 岩波数学事典（第 3 版）の巻末の公式 6VIII(p. 1370) で，実及び複素射影空間が何次元のユークリッド空間に埋め込み・はめ込み可能であるかの次元の表が掲載されている. これを見ると，まだ埋め込み・はめ込みの最低次元が完全に決定されている場合は，それほど多く無いようである. 未解決な場合の研究に，現在も人知れず取り組んでいるトポロジストはいないのだろうか. 私は，こうした目標が明確で解けたら定理の主張として判りやすい問題は個人的に好みである.

埋め込みやはめ込みは，取りあえずは多様体をユークリッド空間に実現させる，という意味で「良い写像」であるといえる.（「良い写像」の数学的に厳密な定義は与えない．感覚的あるいは便宜的に解釈していただきたい.）

一方，次元の大小関係を逆にした場合，すなわち $n > p$ のときの類似の問題の考察は，$p = 1$ のときのモース関数の存在を除けば,（私にとっては不思議にも）ほとんど成されてきていない．つまり，

> "f として「良い写像」がいつ存在するか？　存在しないならば，何が障害になるのか？"

という問題の考察である．この問題に対する先行結果が極めて少ないのは，おそらく $n < p$ の場合は典型的に「良い写像」である埋め込み・はめ込み写像があるのに較べて，$n \geq p$ の場合の方が「良い写像」の選び方が難しいことに起因しているのであろう（と思われる）．実際，M^n を C^∞ 級閉多様体，$N^p = \mathbf{R}^p$ とすると任意の C^∞ 級写像 $f : M^n \to \mathbf{R}^p$ は必ず特異点（写像 f の微分の階数が退化する点）が現れることがただちにわかるが，一般に現れる特異点のタイプは分類するだけでも複雑極まりない．そこで，特異点は必ず現れるのだから，取りあえず一番簡単な特異点しか持たない C^∞ 級写像を「良い写像」と考えて，その（非）存在を考察しよう[1]，というのが本稿の内容である．

§1. 折り目写像

$n \geq p$ とする．C^∞ 級写像 $f : M^n \to \mathbf{R}^p$ に対して，

$$S(f) = \{x \in M^n ; \mathrm{rank}\; df_x < p\}$$

とおいて，f の特異点集合とよぶ．$x \in S(f)$ に対して，$(x_1, \ldots, x_n)$ を x を中心とする局所座標，$(y_1, \ldots, y_p)$ を $f(x)$ を中心とする局所座標とする．このとき，

$$y_i \circ f = x_i \;\; (1 \leq i \leq p-1), \;\; y_p \circ f = \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2$$

という標準型をもつ特異点のことを**折り目特異点**とよぶ．写像 f が特異点としては，折り目特異点しかもたないとき，**折り目写像**とよぶことにする．折り目特異点は，任意の C^∞ 級写像 $f : M^n \to \mathbf{R}^p$ に必ず現れる.（$p = 1$ ならば，折り目写像は，モース関数に他ならない．これを「良い写像」に選ぶのはそれほど悪いセンスではなかろう）そこでつぎの問題を考える：

> **【問題】** M^n が与えられたとき，いつ折り目写像 $f : M^n \to \mathbf{R}^p$ が存在するか？　あるいは存在しないか？

[1] ここで述べている「埋め込み・はめ込み問題」の counterpart としての「良い写像の存在問題」を論じるという観点は佐伯氏による.

行き先の次元pが高い場合と同様に，最低何次元の折り目写像が存在するのかを問うのは意味が無い．任意の多様体上にはモース関数が存在するからである．したがって，上の問題は$p \geq 2$で論じるのが筋である．簡単な場合で，球面や球面の直積上には，行き先の次元pを問わず折り目写像がいつでも存在することがすぐにわかる．また，**問題**の$p = 2$の場合は，つぎのように完全に解決している．

【定理 1】 (R. Thom, H. Levine) M^nのオイラー標数が偶数ならば，いつでも折り目写像$f : M^n \to \mathbf{R}^2$が存在するが，奇数ならば存在しない．

定理の主張の前半部分がLevineによる（ただし，$n \geq 3$が必要で$n = 2$の場合はすぐ下で述べる）結果であり，後半はThom （より詳しくは後述するが，M^nのstratificationのstrataの配置を特性類で表す特異点集合のThom多項式の概念）による．この場合の折り目写像の存在の障害は，オイラー標数の偶奇すなわち，最高次のStiefel-Whitney類$w_n \in H^n(M^n; \mathbf{Z}_2)$であることがわかる．したがって，**問題**の考察の対象は，$p \geq 3$の場合となる．さらに付け加えて言えば,「埋め込み・はめ込み問題」の場合行き先の次元を下げるにつれ，難しさが増すのであった．これとは反対に，$n \geq p$の場合に良い写像の存在問題を論じる際には，行き先の次元pを高くすればするほど，難しくなるのである．

さて，一般次元で最初に折り目写像の存在問題を論じたのは，Y. Eliashbergであった．彼は,「M^nがstably parallelizableならば，いつでも折り目写像$f : M^n \to \mathbf{R}^p$が存在する」ことを証明した（[2]を参照）．しかし，この十分条件（安定平行性）を満たす多様体のクラスは一般には少ない．また，stably parallelizableではない多様体で折り目写像を許容するものはかなりある（詳しくは，[3]を参照）．一つだけ述べれば，S^2上の自明でないS^2束の全空間$S^2\tilde{\times}S^2$上には，折り目写像$f : S^2\tilde{\times}S^2 \to \mathbf{R}^3$が存在する（第2 Stiefel-Whitney類が消えない，$w_2(S^2\tilde{\times}S^2) \neq 0$，から，$S^2\tilde{\times}S^2$はstably parallelizable ではない）．

一方でつぎのような制限もある：

【定理 2】 (Kikuchi-Saeki[4], Saeki-Sakuma[5]) M^nをオイラー標数が奇数のn次元閉多様体とする．折り目写像$f : M^n \to \mathbf{R}^p$が存在するならば，pは$1, 3, 7$のいずれかでなくてはならない．

$p = 1$のときは自明な結果であるが，$p = 3, 7$の場合はある意味で特殊なのである．というのは，ある<u>向き付け不可能</u>な多様体M^nでオイラー標数が奇数のものから$\mathbf{R}^p$ $(p = 3, 7)$への折り目写像は存在する．しかし，$p = 3, 7$で向き付け可能な多様体M^nからの折り目写像が存在するかどうかの考察は，格段に難しくなるのである．尚，[5]の証明を見てもらえればわかるように，この制限は直接ホップ

不変量1の元の（非）存在定理（有名なJ. F. Adamsによる解）に由来する．この結果を見て，「写像の問題を扱っているのだから，写像のホモトピー不変量が顔を出すのは当然」と解釈してもよいし，「こんなところにも球面のホモトピー群の情報が関係するのか」，と感動してもよい．(私は断然後者であるが … [2]) こうして，オイラー標数が奇数の多様体 M^n が向き付け可能な場合に折り目写像の(非)存在を $p=3,7$ で論じるには，ホップ不変量よりも更に深い"障害"を見いださなくてはならないことになる．

ところで，(定理2が得られるより以前に) その一端を最初に発見したのは，佐伯修氏であった．

【定理 3】 (Saeki [6]) M^4 を複素射影平面 $\mathbf{C}P^2$ のホモロジー群と同型な群をもつ4次元閉多様体とする．(したがって，向き付け可能である.) このとき，折り目写像 $f: M^4 \to \mathbf{R}^3$ は決して存在しない．

この結果はいろいろな意味で重要である．その重要性を強調するために，多少横道に逸れるかもしれないが，その背景に少し言及しておこう．

最初に，ジェネリックな写像について説明する．ホイットニー位相で位相空間と見なした写像空間 $C^\infty(M^n, N^p)$ の中で稠密な部分集合を S とするとき，S に属する元（すなわち写像）を**ジェネリックな写像**[3]という．

さて，$f: M^4 \to \mathbf{R}^3$ をジェネリックな写像とする．このとき，一般に現れる特異点型はつぎの三つである：

(1) $y_i \circ f = x_i \ (i=1,2), \quad y_3 \circ f = x_3^2 \pm x_4^2$

(2) $y_i \circ f = x_i \ (i=1,2), \quad y_3 \circ f = x_3^3 + x_1x_2 \pm x_4^2$

(3) $y_i \circ f = x_i \ (i=1,2), \quad y_3 \circ f = x_3^4 + x_1^2x_2 + x_1x_3 \pm x_4^2$

(1)の型はすでに説明した折り目特異点，(2)の型は**尖点**(cusp)，(3)の型は**ツバメの尾**(swallow tail)特異点とそれぞれよばれる．ヤコビアンの計算から，簡単に(1)は2次元部分多様体，(2)は1次元部分多様体，(3)は離散点であることがわかる（詳しくは，[1]参照.）．折り目特異点集合を $A_1(f)$, 尖点の集合を $A_2(f)$, ツバメの尾特異点集合を $A_3(f)$ と表すことが多い．このとき，

$$S(f) = \overline{A_1(f)} = A_1(f) \cup A_2(f) \cup A_3(f), \quad \overline{A_2(f)} = A_2(f) \cup A_3(f)$$

が成り立っている．($\overline{X}$ は X の位相的閉包を表す.) したがって，それぞれを M^4 の mod 2 ホモロジー類として実現して，そのポアンカレ双対を取ることにより，あ

[2]この定理は，たしか東北大での学会の折り，学会をサボって青葉城あたりを散策しているときに二人で議論しているときにできた（と記憶している）．

[3]これよりやや弱い**安定写像**という概念（[1]参照）もある．安定写像はジェネリックな写像である．逆は，必ずしも成り立たない．特異点集合を中心にして幾何学的考察をする場合は，安定写像の方が扱いやすい．

るコホモロジー類が得られるはずである．これを与えられた特異点型の**Thom 多項式**[4]という．その結果は

$$[S(f)]_2^* = w_2 \in H^2(M^4; \mathbf{Z}_2), [\overline{A_1(f)}]_2^* = 0, [A_3(f)]_2^* = 0$$

であることが知られている．(上付きの $*$ はポアンカレ双対をあらわす．)

最初の結果は，Thom により，残りは上の標準型から容易にわかる．つまり，この結果が意味するところは，向き付け可能な 4 次元閉多様体 M^4 上で，(いつでも存在する) ジェネリックな写像を考えると，特異点集合全体は，一般に M^4 のスピン構造の障害になっている[5]のである．

山口大学の安藤良文氏は，80 年代半ばに "偶数個あるツバメの尾特異点は M^4 が向き付け可能ならば対で消去できる" ことを証明した[6]．しかし一方で，定理 3 の主張するところは，そのアナロジーはもはや一般には成り立たないこと，すなわち尖点の Thom 多項式は消えているが M^4 の選び方によっては，"尖点は消去不可能" であることを示している．

このような問い「ある特異点型の Thom 多項式は消えているとき，その特異点集合は，いつでも消去可能か？」は，当然本稿の内容とも密接に関連するものである．実際筋のいい問題で，

Arnol'd, Vassiliev, Goryunov and Lyashko, Singularities: Local and Global theory, Dynamical System IV, Encyclopeadia Math. vol. 6, Springer-Verlag, 1993.

の Chapter 4, §5 において（おそらく Vassiliev の記述によるものと推測されるが），明確な問題意識のもとで述べられている．しかし，この問いに対する肯定的場合の結果の引用はあるが，否定的な場合があることにはまったく言及がない．ひょっとすると著者らは，楽観的にこの問いはいつでも肯定的であろうぐらいに考えていたのかもしれない．その意味でも，佐伯の定理は最初の否定的解答であると言ってもいいかもしれない．

実は，佐伯氏の証明では，私の院生時代にやった（証明の単純な）mod 4 合同式が本質的に用いられた．

---

[4]一般に，Thom 多項式の概念は，次元の大小関係に依らずに適当なジェット横断性を満たす C^∞ 級写像 $f : M^n \to N^p$ に対して定義される．この場合，Stiefel-Whitney 類 $w_i(M^n)$ と $f^* w_j(TN^p)$ の多項式で表されるが，多様体の選び方には依らない普遍的なものである．複素解析的カテゴリーでは，多項式は Chern 類で表される．Thom 多項式の形を決定することは，特異点の分類よりも更に格段に難しい．しかし，最近ハンガリーの若手トポロジスト Rimányi が $n < p$ の場合の Thom 多項式を，驚いたことに（複素解析的カテゴリーも含めて）ほぼ完全に決定した．Richard Rimányi, Invent. math. **143** (2001), 499–521 を参照．彼の方法論では，$n \geq p$ の場合に Thom 多項式を決定することはできない．やはり，$n \geq p$ の場合の考察はもっと難しい．

[5]最近の研究では，もっと詳しく，ある種の折り目特異点集合は，4 次元多様体上の（標準的な）微分構造の障害になっていることがわかってきている．詳しくは，[1] の第 5 章参照．

[6]Y.Ando, On the elimination of Morin singularities, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 471–487 参照

【命題 4】 M^4 を $H_1(M^4;\mathbf{Z})=0$ を満たす向き付けられた4次元閉多様体とする．任意のジェネリックな写像 $f: M^4 \to \mathbf{R}^3$ に対して，

$$\sigma(M^4) \equiv -S(f)\cdot S(f) \pmod 4 \tag{1.1}$$

が成り立つ．ここで $\sigma(M^4)$ は M^4 の符号数 (signature) であり，$S(f)\cdot S(f)$ は特異点集合（余次元2の部分多様体）の M^4 における自己交点数を表す．

ここでは単なる技術的理由から，1次元ホモロジー群に関する条件が必要となってしまった．

ところで，有名な「ロホリンの定理」をご存じの4次元トポロジーの専門家ならば，一目上の合同式のマイナスの符号が不自然に感ぜられることであろう．しかし，これは不自然ではないのである．(1.1) 式の自然な見方を得るために，ちょっと細工をしてみよう．

$$S(f)\cdot S(f) \equiv -\sigma(M^4) \equiv 3\sigma(M^4)\ \ (= p_1[M^4]) \pmod 4 \tag{1.2}$$

と考えればよいのである．ここで，最後の等式は Hirzebruch の符号数公式で，$p_1[M^4]$ は M^4 の Pontrjagin 数を表す．

最近大本亨氏のおかげで再び驚くべき事実に出会うことができた．実は命題4では，1次元ホモロジー群に関する仮定は不要で，しかも (1.2) 式は合同式としてではなく等式

$$p_1[M^4] = S(f)\cdot S(f) \tag{1.3}$$

として成り立つ（！）というのである．これについては，次節で述べよう．

§2. 自己交叉類

M^n を向き付けられた n 次元多様体，$f: M^n \to \mathbf{R}^p$ をその特異点集合 $S(f)$ が M^n の部分多様体になるような‘適度に良い’写像とする．すると $S(f)$ は，(必ずしも連結とは限らない) $(p-1)$ 次元の部分多様体であることが容易にわかる．しかも，一般に $S(f)$ は向き付け不可能な連結成分をもちえる．例えば，M^n をオイラー標数が奇数（したがって，必然的に n は偶数である）の多様体で，f を折り目写像とすると，$S(f)$ は必ず向き付け不可能な連結成分をもつことが証明できる．

ところで，$S(f)$ を M^n の中で自分自身と横断的に交わるようにジェネリックに摂動するとその交わりの部分 $\tilde{S}$ は，M^n の $2(p-1)-n = 2p-n-2$ 次元の部分多様体で，しかも向き付け可能であるとしてよい．そこで，部分多様体として実現される $\tilde{S}$ の $\mathbf{Z}$ 係数ホモロジー類を $[\tilde{S}] \in H_{2p-n-2}(M^n;\mathbf{Z})$ で表すことにする．そして，そのポアンカレ双対 $[\tilde{S}]^* \in H^{2(n-p+1)}(M^n;\mathbf{Z})$ を $I(S(f))$ で表し，与えられた C^∞ 写像 f の特異点集合の**自己交叉類** (self-intersection class) とよぶことにする．

この定義に至る動機付けは，前節で述べた(1.2)式，すなわち特異点集合の自己交点数が M^4 のポントリャーギン数に深く関わるという結果にある，と思えばわかりやすい．実際，自己交叉類は自己交点数の素直な一般化になっている．

こうして定義された自己交叉類の評価が以下の議論の目的である．

さて，得られた結果を述べる前に，折り目写像の一般化であるモラン写像について述べておく．

$f : M^n \to N^p$ を n 次元多様体から p 次元多様体への C^∞ 級写像とする．ただし，$n \geq p$ である．$x \in S(f)$ に対して，$(x_1, \ldots, x_n)$ を x を中心とする局所座標，$(y_1, \ldots, y_p)$ を $f(x)$ を中心とする局所座標とする．このとき，

$$y_i \circ f = x_i \ (1 \leq i \leq p-1),\ \ y_p \circ f = x_p^{l+1} + \sum_{i=1}^{l-1} x_i x_p^{l-i} \pm x_{p+1}^2 \pm \cdots \pm x_n^2$$

という標準型をもつ特異点のことを A_l 型のモラン特異点とよぶ．例えば，$l = 1$ ならば折り目特異点，$l = 2$ ならば尖点，$l = 3$ ならばツバメの尾特異点である．C^∞ 級写像 f が特異点としては，モラン特異点しか持たないとき，写像 f を**モラン写像**とよぶ（[5] 参照）．モラン写像の特異点集合 $S(f)$ は，部分多様体になるという良い性質がある．$(n, p) = (4, 3)$ の場合には，モラン写像は前節で述べたジェネリック写像である．

【定理 5】 (Ohmoto-Saeki-Sakuma[7])[7] M^n を向き付けられた n 次元閉多様体とする．ただし，n は偶数とする．$f : M^n \to \mathbf{R}^p$ をモラン写像で，$n-p+1 = 2k$ $(n \geq p \geq 1, k \geq 1)$ とする．このとき，等式

$$I(S(f)) = p_k(TM^n) \in H^{4k}(M^n; \mathbf{Z})$$

が modulo 4-torsion で成り立つ．ここで $p_k(TM^n)$ は M^n の接束の k 次ポントリャーギン類である．

$n = 4$, $p = 3$ とする．向き付けられた 4 次元多様体では最高次のコホモロジー群で，torsion を気にする必要が無いので，この定理から前節で述べた (1.2) 式の integral version が直ちに得られるのである．(その integral formula から定理 3 は直ちに再証明されることに注意する.)

この公式の強力さを示す更なる例に一つ言及しておこう．

【例】 折り目写像 $f : \mathbf{C}P^2 \sharp \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{R}^3$ は決して存在しない．

---

[7] 実際に得られた結果はモラン写像よりは少し広い写像に対して，証明できているが，ここでは記述の簡明さを優先した．

証明．折り目写像 $f : \mathbf{C}P^2 \sharp \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{R}^3$ が存在したと仮定しよう．折り目特異点の局所座標で表した標準型の第３成分が

$$y_3 \circ f = x_3^2 + x_4^2 \quad \text{のとき，定値折り目特異点}$$

$$y_3 \circ f = x_3^2 - x_4^2 \quad \text{のとき，不定値折り目特異点}$$

とよぶ．それぞれの特異点集合を $S^+(f)$, $S^-(f)$ と表すことにする；$S(f) = S^+(f) \cup S^-(f)$. このとき，Saeki [6] により

(i) $S^+(f)$ は向き付け可能閉曲面から成り，

(ii) M^4 における不定値折り目特異点集合の自己交点数はゼロである，

ことが証明されている．

いま，標準基底を $\alpha, \beta \in H_2(\mathbf{C}P^2 \sharp \mathbf{C}P^2; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ とすれば，(i) より $S^+(f)$ は整係数ホモロジー類を代表するとしてよい．それを $[S^+(f)] = p\alpha + q\beta$ $(p, q \in \mathbf{Z})$ とおく．$\sigma(\mathbf{C}P^2 \sharp \mathbf{C}P^2) = 2$ だから，integral formula を使って，

$$6 = p_1[\mathbf{C}P^2 \sharp \mathbf{C}P^2] = S(f) \cdot S(f) = S^+(f) \cdot S^+(f) + S^-(f) \cdot S^-(f)$$

を得るが，(ii) により $S^-(f) \cdot S^-(f) = 0$ であるから，

$$6 = [S^+(f)] \cdot [S^+(f)] = (p\alpha + q\beta)^2 = p^2 + q^2$$

となるが，これは明らかに整数解をもたないので矛盾が生じた．したがって，折り目写像は存在し得ない．

ところで，前節で紹介したように $S^2 \tilde{\times} S^2$ は折り目写像を許容する．すなわち，折り目写像 $f : \mathbf{C}P^2 \sharp \overline{\mathbf{C}P^2} \to \mathbf{R}^3$ は存在するのである．このことから，折り目写像の存在を論ずる際には，多様体の向きの入れ方は本質的であるということができる．

[注] つい最近佐伯氏は向き付けられた４次元閉多様体 M^4 が $\mathbf{R}^3$ への折り目写像を許容するための必要十分条件を完全に決定した．当然上の例もその議論からわかる．定理３や上の例は実は例外的で，ほとんどすべての向き付けられた４次元多様体は $\mathbf{R}^3$ への折り目写像を許容するようである．しかしこの結果はまだ preprint もできていないようなので，これ以上詳しく述べることはしない．

さて，定理５からただちにつぎの系が得られる：

【系 6】 ([7]) $f : M^n \to \mathbf{R}^p$ が折り目写像で，$n - p + 1 = 2k$ ならば，ある $x \in H^{2k}(M^n; \mathbf{Z})$ が存在して，$x \cup x = p_k(TM^n)$ が modulo 8-torision で成り立つ．

さらにこの系の応用として，ポントリャーギン類が容易に計算できる，例えば４次元複素射影空間や２次元四元数射影空間（とそれらの連結和からなる）などの８次元多様体から $\mathbf{R}^7$ への折り目写像は存在しない，ということがわかる．

$M^8 = \mathbf{C}P^4$ あるいは $\mathbf{H}P^2$ とする．そこで，折り目写像 $f : M^8 \to \mathbf{R}^7$ が存在すると仮定する．このとき，生成元 $\alpha^2 \in H^4(\mathbf{C}P^4; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ に対して，$p_1(\mathbf{C}P^4) = 5\alpha^2 \neq 0$ であり，生成元 $u \in H^4(\mathbf{H}P^2; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ に対して，$p_1(\mathbf{H}P^2) = 2u \neq 0$ である．一方，系 6 よりある $x \in H^2(\mathbf{H}P^2; \mathbf{Z})$ が存在して，

$$x \cup x = p_1(\mathbf{H}P^2) = 2u \neq 0$$

となるが，これは $H^2(\mathbf{H}P^2; \mathbf{Z}) = 0$ である事実に反する．同じく，系 6 よりある $y \in H^2(\mathbf{C}P^4; \mathbf{Z})$ が存在して，

$$y \cup y = p_1(\mathbf{C}P^4) = 5\alpha^2 \neq 0$$

となる．このとき，$H^2(\mathbf{C}P^4; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ だから生成元を α とすれば，ある整数 $k \in \mathbf{Z}$ が存在して，$y = k\alpha$ とおけて，上の等式より $k^2 = 5$ となり，やはり矛盾である．

この議論は $\mathbf{C}P^4$ あるいは $\mathbf{H}P^2$ のコホモロジー環の構造のみによるものであり，これらと同じコホモロジー環をもつ 8 次元閉多様体についても同様の折り目写像の非存在が示せる．更に，全く類似の議論で $M^8 = \sharp_k \mathbf{C}P^4 \sharp_l \overline{\mathbf{C}P^4}$ あるいは $\sharp_k \mathbf{H}P^2 \sharp_l \overline{\mathbf{H}P^2}$ についても折り目写像の非存在が示せる．ただし，ここで k, l は $k + l \geq 1$ を満たす非負整数であり，上付きのバーは逆の向きをもつ多様体を表す．$M^8 = \mathbf{C}P^2 \times \mathbf{C}P^2$ についても同様の結果が得られる．

ここでの議論と直接関係のあることではないかもしれないが，ちなみに $\mathbf{C}P^4$ と $\mathbf{C}P^2 \times \mathbf{C}P^2$ は，8 次元の oriented cobordism group $\Omega^8 \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ の生成元であることに注意する．

§3. 定理 5 の証明の概要

本節で，定理 5 の証明の概要を述べて終わりにしよう．

証明のアイデアは，desingularization method を用いることにある．証明は，$p = n - 1$（つまり，$k = 1$ の場合）のみについて述べる．一般の場合の証明も適切な置き換えをすることによって，おおよそ同じ議論で行われる．

任意の $x \in M^n$ に対して，ファイバーが接空間 TM^n_x における向き付けられた 2 次元平面全体から成るグラスマン束を $\pi : G \to M^n$ とし，G 上の tautological 2-plane bundle を γ とする．自明束 $\pi^* f^* T\mathbf{R}^{n-1} = \varepsilon^{n-1}$ により，G 上の準同型束 $\mathrm{Hom}(\gamma, \varepsilon^{n-1})$ を考える．このとき，このベクトル束は自然な切断 s をもち，写像に関する仮定から，s はゼロ切断に横断的としてよい．そこで，preimage $s^{-1}(0)$ を $\tilde{S}(f)$ とおいて，$j : \tilde{S}(f) \hookrightarrow G$ を包含写像，$\tilde{\pi} : \tilde{S}(f) \to S(f)$ を射影とする．$\tilde{\pi}$ は orientation double cover になっている．

また，ν を埋め込み $\iota : S(f) \hookrightarrow M^n$ の法束とする．このとき，Gysin 準同型

$$\iota_! : H^*(S(f); \mathcal{Z}) \to H^{*+2}(M^n; \mathbf{Z})$$

が定義できる．ただしここで，$S(f)$ は一般に nonorietable になり得るので，局所係数 $\mathcal{Z}$ を用いていることに注意せよ．さらに，$e(\nu) \in H^2(S(f);\mathcal{Z})$ を法束 ν の twisted Euler 類とする．

【定義】
$I(S(f)) = \iota_!(e(\nu)) \in H^4(M^n;\mathbf{Z})$ と定めて，特異点集合 $S(f)$ の**自己交叉類** (self-intersection class) とよぶことにする．
§2 で述べた幾何学的な定義と一致することが容易にわかる．

さて，証明の概要に戻ろう．まずは，

$$j_*[\tilde{S}(f)]^* = e(\mathrm{Hom}(\gamma, \varepsilon^p)) = (e(\gamma))^p$$

が成り立つことがすぐにわかる．そこで、$S(f)$ 上で定義されたベクトル束を $K = \mathrm{Ker}\, df, Q = \mathrm{Coker}\, df$ とおく．このとき，$\mathrm{Hom}(K,Q) \cong \nu$ に注意する．また，$\tilde{S}(f)$ 上では，

$$\mathrm{Hom}(j^*\gamma, \varepsilon^p/\mathrm{Im}\, df) \cong \tilde{\pi}^*\nu$$

が成り立つ．したがって，

$$e(j^*\gamma) = e(\mathrm{Hom}(j^*\gamma, \varepsilon^p/\mathrm{Im}\, df)) = e(\tilde{\pi}^*\nu)$$

である．

【補題】 $\pi_!((e(\gamma))^{n-2}) = 2$ が成り立つ．

証明は省略する．さて，$\pi^*TM = \gamma \oplus \gamma^\perp$ と分解することにしよう．このとき，$k \leq N = [\frac{n-2}{2}]$ に対して，

$$\pi^*p_{k+1}(TM) - p_{k+1}(\phi^\perp) = p_1(\phi)p_k(\phi^\perp)$$

が modulo 2-torsion で成り立つ．さらに，このことを利用して

$$\begin{aligned}
j_!(e(j^*\phi)) &= e(\phi)j_!(1) = e(\phi)^n = p_1(\phi)e(\phi)^{n-2} \\
&= (\pi^*p_1(TM) - p_1(\phi^\perp))e(\phi)^{n-2} \\
&= \pi^*p_1(TM)e(\phi)^{n-2} - p_1(\phi^\perp)p_1(\phi)e(\phi)^{n-4} \\
&= \pi^*p_1(TM)e(\phi)^{n-2} - (\pi^*p_2(TM) - p_2(\phi^\perp))e(\phi)^{n-4} \\
&= \pi^*p_1(TM)e(\phi)^{n-2} - \cdots \pm \pi^*p_{N+1}(TM)e(\phi)^{n-2N}.
\end{aligned}$$

が得られるが，ここへ adjunction formula と上の補題を適用して

$$\begin{aligned}
\pi_!j_!(e(j^*\phi)) &= p_1(TM)\pi_!(e(\phi)^{n-2}) - p_2(TM)\pi_!(e(\phi)^{n-4}) + \cdots \\
&= 2p_1(TM)
\end{aligned}$$

となる．一方，

$$i_!\tilde{\pi}_!(e(j^*\phi)) = i_!\tilde{\pi}_!(e(\tilde{\pi}^*\nu)) = i_!((e(\nu)\tilde{\pi}_!(1)) = i_!(2e(\nu)) = 2i_!(e(\nu))$$

を得る．さらに，可環性 $i_!\tilde{\pi}_! = \pi_!j_!$ から

$$2i_!((e(\nu)) = 2p_1(TM)$$

を得るので，証明が終わった．

一般の場合の証明は，証明の出だしのグラスマン束が $2k$ 次元平面からなるのと，tautological bundle が $2k$ 平面束になるのに伴い，適当な箇所で，2 を $2k$ に置き換えて計算すればよい．

参考文献

[1] 佐伯修・佐久間一浩『幾何学と特異点－第II部微分位相幾何学と特異点』（共立出版），2001年5月．

[2] J. M. Èliašberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.

[3] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into* $\mathbf{R}^3$, Pacific J. Math. **184** (1998), 175–193.

[4] S. Kikuchi and O. Saeki, *Remarks on the topology of folds*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 905–908.

[5] O. Saeki and K. Sakuma, *Maps with only Morin singularities and the Hopf invariant one problem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **124** (1998), 501–511.

[6] O. Saeki, *Note on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan (1992), 551-566.

[7] T. Ohmoto, O. Saeki and K. Sakuma, *The self-intersection class and non-existence of fold maps*, preprint.